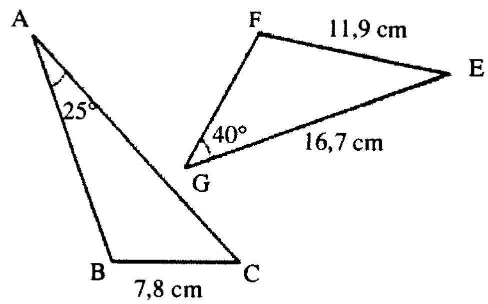
École secondaire Montcalm
SN 4

Nom : Corrigé
Gr. : ____

Document de travail
Isométrie

A. Exercices sur les propriétés des figures isométriques

1. Dans la figure suivante, $\Delta ABC \cong \Delta EFG$.



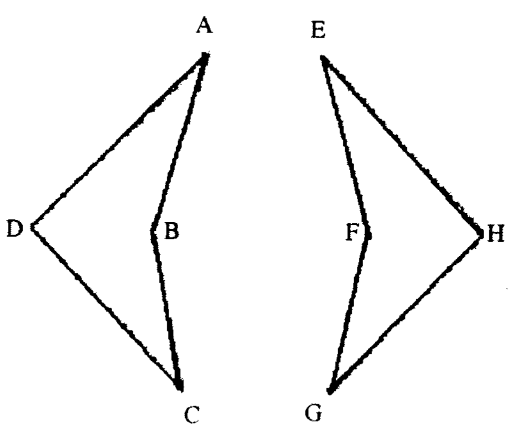
a) Identifier les éléments correspondants.

Angles	Côtés
$\angle A$ et $\angle E$	$\overline{AB}$ et $\overline{EF}$
$\angle B$ et $\angle F$	$\overline{BC}$ et $\overline{FG}$
$\angle C$ et $\angle G$	$\overline{AC}$ et $\overline{EG}$

b) Donner la mesure des angles et des côtés suivants

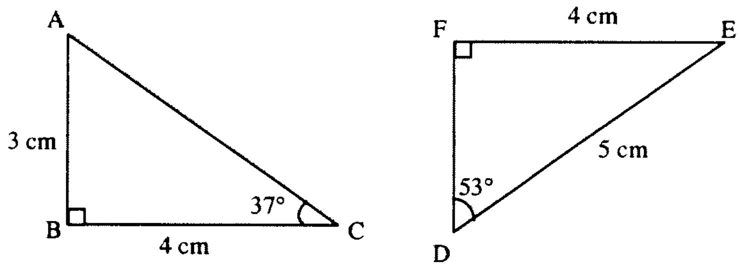
$m\angle C$ = $40°$	$m\angle E$ = et $25°$
$m\angle B$ = $115°$	$m\angle F$ = et $115°$
$m\overline{AB}$ = $11,9$ cm	$m\overline{FG}$ = et $7,8$ cm
$m\overline{AC}$ = $16,7$ cm	

2. Sachant que les quadrilatères ABCD et EFGH sont isométriques, identifier les éléments isométriques.



Angles	Côtés
$\angle A$ et $\angle E$	$\overline{AD}$ et $\overline{EH}$
$\angle B$ et $\angle F$	$\overline{AB}$ et $\overline{EF}$
$\angle C$ et $\angle G$	$\overline{BC}$ et $\overline{FG}$
$\angle D$ et $\angle H$	$\overline{CD}$ et $\overline{GH}$

3. Soient les triangles rectangles suivants.



a) Trouver les mesures manquantes.

$m\angle A =$ 180° - (90° + 37°) = 53° $m\overline{AC} =$ 5 cm

$m\angle E =$ 180° - (90° + 53°) = 37° $m\overline{FD} =$ 3 cm

$hyp^2 = p^2 + q^2$
$m\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2}$
$m\overline{AC} = 5$

$hyp^2 = p^2 + q^2$
$5^2 = m\overline{FD}^2 + 3^2$
$m\overline{FD} = \sqrt{5^2 - 3^2}$
$m\overline{FD} = 3$

b) Vérifier si ces triangles sont isométriques, c'est-à-dire vérifier si les angles correspondants sont isométriques et si les côtés homologues sont isométriques.

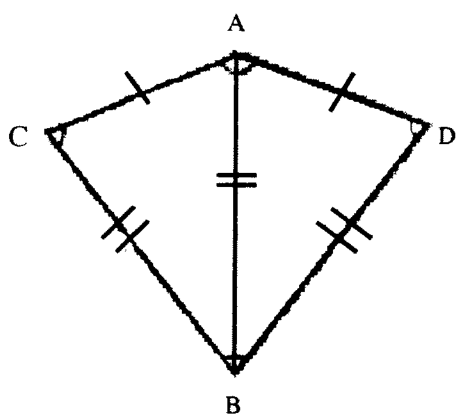
$\angle A \cong$ $\angle D$; $\angle B \cong$ $\angle F$; $\angle C \cong$ $\angle E$

$\overline{AB} \cong$ $\overline{FD}$; $\overline{BC} \cong$ $\overline{FE}$; $\overline{AC} \cong$ $\overline{DE}$

Donc $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (par C-A-C)

B. Exercices sur les propriétés de la relation de congruence

1. Soit la figure suivante où $\Delta ABC \cong \Delta ABD$. Quelle propriété de la relation de congruence permet d'affirmer que :



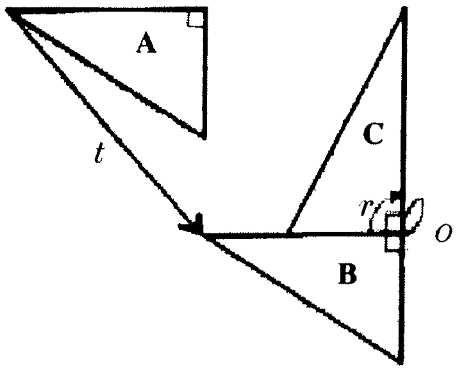
a) Si $\angle C \cong \angle D$, alors $\angle D \cong \angle C$
symetrie

b) $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ réflexivité

c) Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ et si $\overline{AB} \cong \overline{BD}$, alors $\overline{BC} \cong \overline{BD}$ transitivité

d) Si $\overline{AC} \cong \overline{AD}$, alors $\overline{AD} \cong \overline{AC}$
symetrie

2. Par la translation t, le triangle B est l'image du triangle A. Par la rotation r, le triangle C est l'image du triangle B. Quelle propriété de la relation de congruence permet d'affirmer que :



a) $\Delta A \cong \Delta A$ réflexivité

b) Si $\Delta A \cong \Delta B$, alors $\Delta B \cong \Delta A$
symétrie

c) Si $\Delta A \cong \Delta B$ et si $\Delta B \cong \Delta C$, alors $\Delta A \cong \Delta C$ transitivité

3. Nommer la propriété de la relation de congruence qui s'applique aux situations données.

a) Dans un triangle rectangle isocèle, si un côté adjacent à l'angle droit est isométrique à l'autre, alors l'inverse est vrai aussi.
symétrie

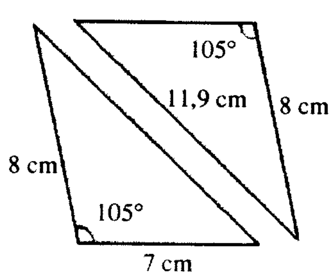
b) Dans un triangle ABC, si la mesure de l'angle A égale la mesure de l'angle B et que la mesure de l'angle B égale la mesure de l'angle C, alors la mesure de l'angle A égale la mesure de l'angle C.
transitivité

c) Le côté AB du triangle ABC est isométrique à lui-même.
réflexivité

C. Exercices sur les cas d'isométrie

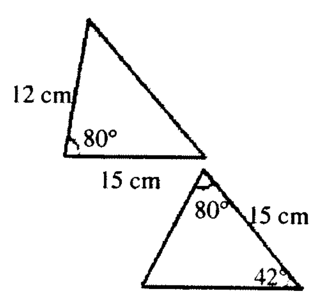
1. Peut-on conclure que les triangles sont isométriques si l'on ne connaît que les mesures des angles ou des côtés indiquées sur les figures ? Si oui, indique le cas d'isométrie (CCC, CAC ou ACA).

a)



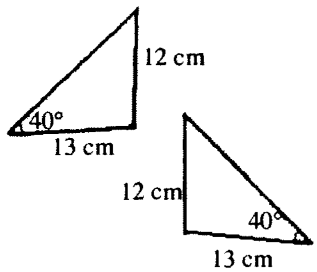
NON

b)



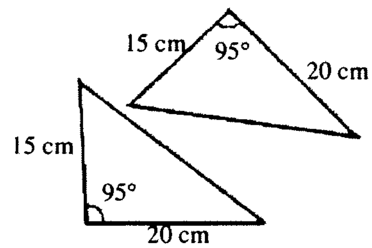
NON

c)



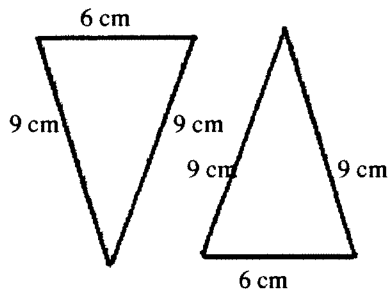
non

d)



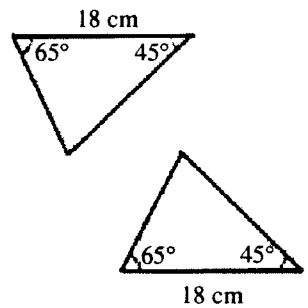
oui C-A-C

e)



oui C-C-C

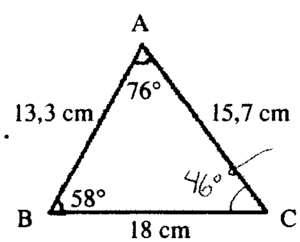
f)



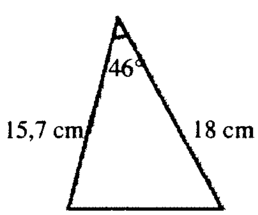
oui ACA

2. Soit le ΔABC ci-contre.

Vérifier si les triangles suivants, dont certaines mesures sont indiquées, sont isométriques au ΔABC. Indiquer ensuite le cas d'isométrie utilisé.

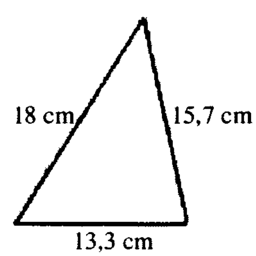


a)



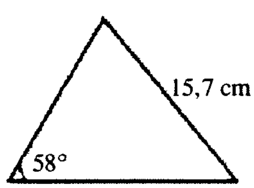
isométrique C-A-C

b)



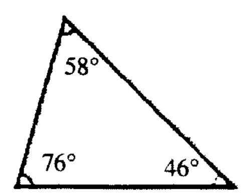
isométriques C-C-C

c)



non

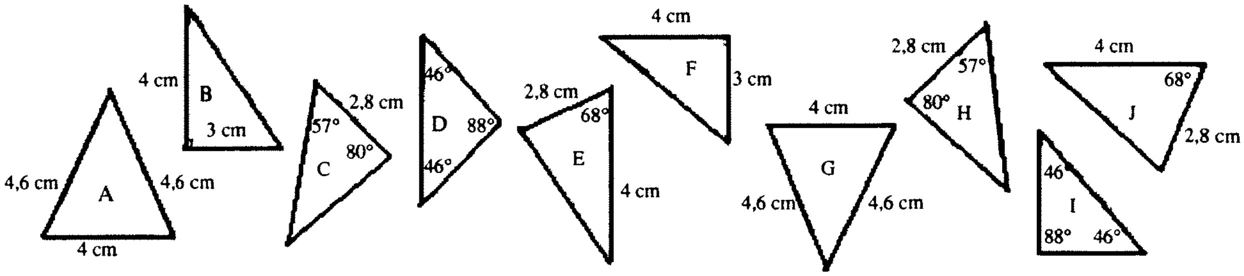
d)



non

3. Voici 10 triangles :

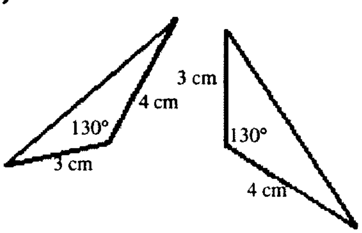
Trouver les quatre paires de triangles isométriques et justifier votre réponse par le cas d'isométrie approprié.



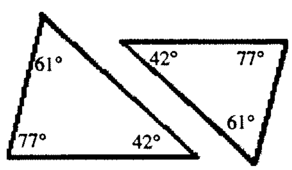
1) ΔA ≅ ΔG C-C-C
2) ΔB ≅ ΔF C-A-C
3) ΔC ≅ ΔH A-C-A
4) ΔE ≅ ΔJ C-A-C

4. Indiquer si les triangles sont isométriques et quel est le cas d'isométrie qui nous permet de l'affirmer.

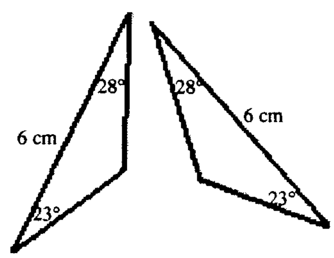
a)



b)



c)



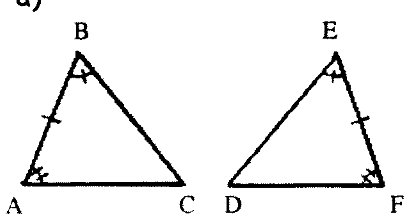
isométrique C-A-C

non

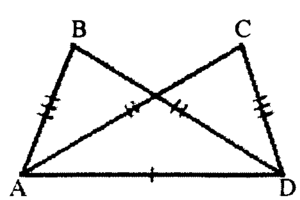
isométrique A-C-A

5. Déterminer la propriété (*CCC*, *CAC*, *ACA*) qui permet de conclure que les triangles sont isométriques.

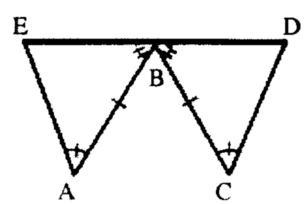
a)



b)



c)

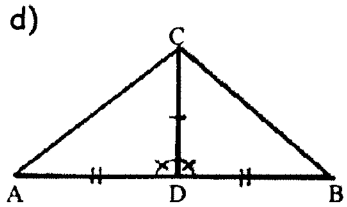


ACA

CCC

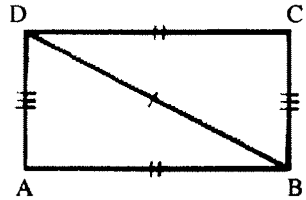
ACA

d)



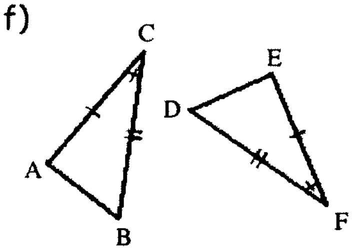
CAC

e)



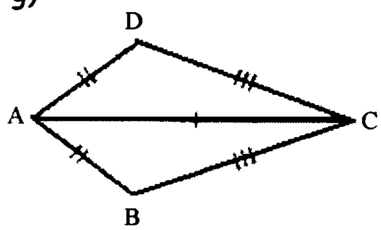
CCC

f)



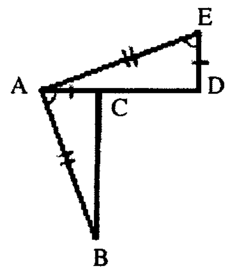
CAC

g)



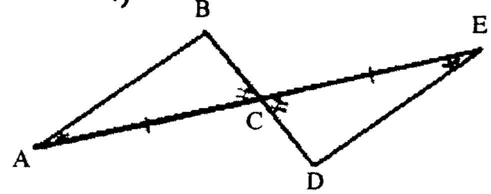
CCC

h)



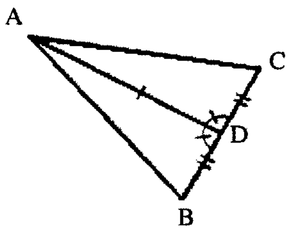
CAC

i)



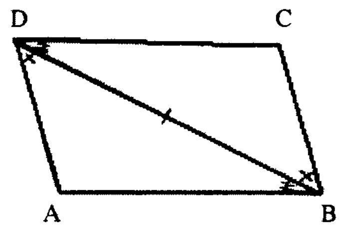
ACA

j)



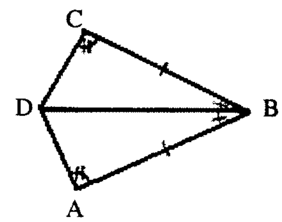
CAC

k)



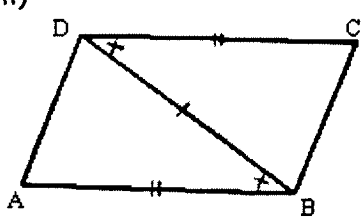
ACA

l)



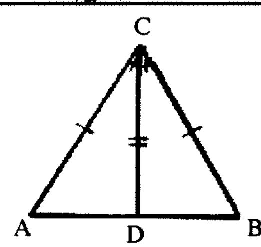
ACA

m)



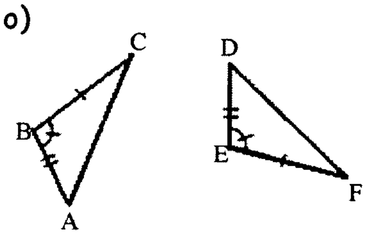
CAC

n)



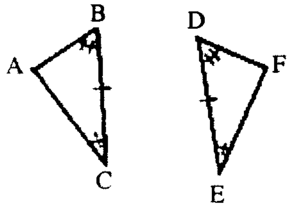
CAC

o)



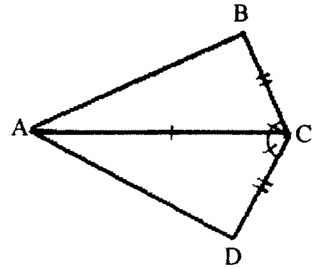
CAC

p)



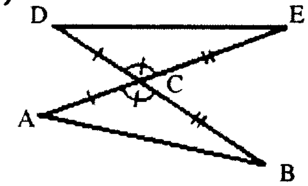
ACA

q)



CAC

r)



CAC

6. Si on ne dispose que des mesures inscrites sur les figures, dans lequel des schémas ci-dessous est-on assuré d'avoir deux triangles isométriques ? Justifier votre réponse

Schéma 1

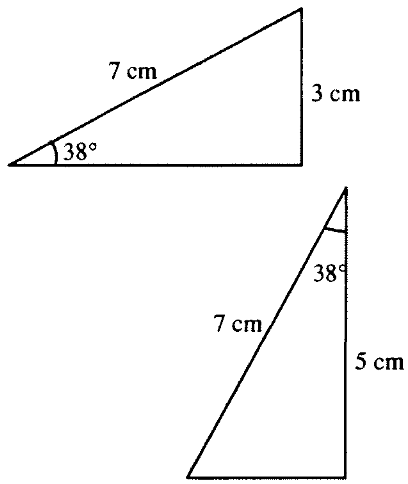


Schéma 2

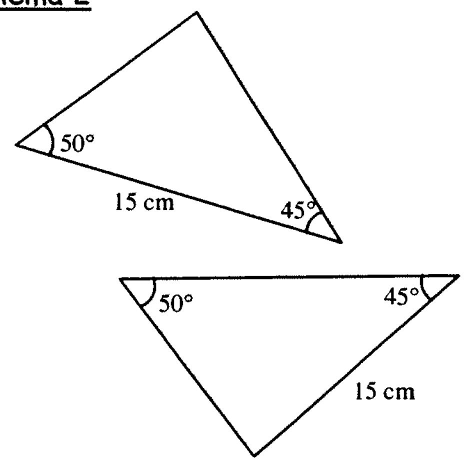


Schéma 3

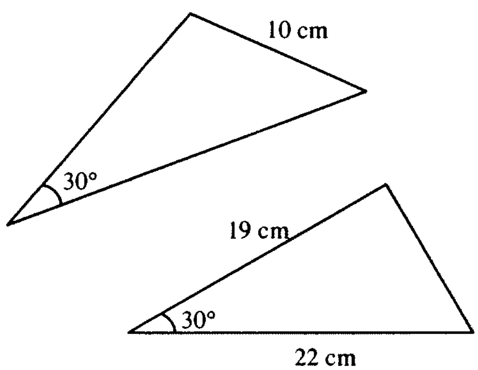
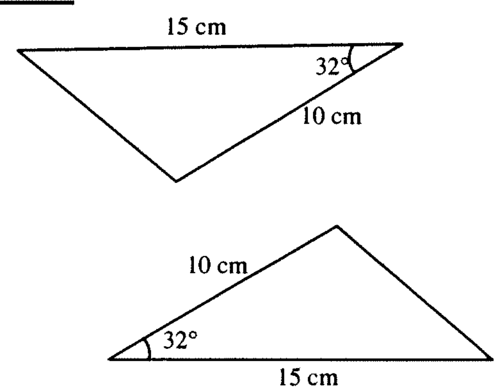


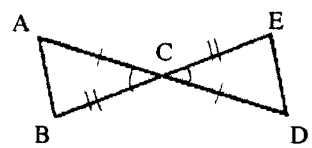
Schéma 4



Réponse : Schéma 4, Deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues isométriques sont isométriques.

D. Exercices sur les preuves (conditions minimales d'isométrie)

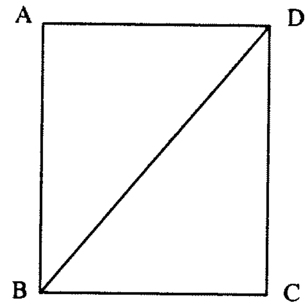
1. Dans la figure ci-dessous, le point C est le milieu des segments AD et BE. Montrer que les deux triangles ABC et CDE sont isométriques.



AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$m\overline{AC} = m\overline{DC}$	car C est au milieu de $\overline{AD}$.
$m\overline{BC} = m\overline{EC}$	car C est le milieu de $\overline{BE}$.
$m\angle ACB = m\angle ECD$	car les angles opposés par le sommet sont isométriques.
$\Delta ABC \cong \Delta CDE$	car deux triangles ayant un angle isométrique entre deux cotés homologues isométriques sont isométriques.

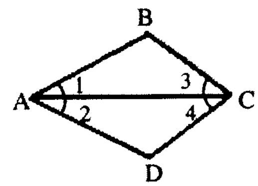
2. Montrer que la diagonale du rectangle ABCD sépare celui-ci en deux triangles isométriques.

$\triangle ADB \cong \triangle DBC$



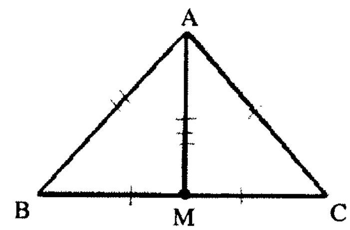
AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\overline{BD} \cong \overline{BD}$	par réflexivité de la relation de congruence.
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$	car les côtés opposés d'un rectangle sont isométriques.
$\overline{AB} \cong \overline{DC}$	car les côtés opposés d'un rectangle sont isométriques.
$\triangle ADB \cong \triangle DBC$	car deux triangles ayant trois côtés homologues isométriques sont isométriques.

3. Dans la figure ci-dessous, le segment AD est la bissectrice des angles BAC et BDC. Prouver que les triangles ABD et ACD sont isométriques.



AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$m\angle BAC = m\angle DAC$	car $\overline{AD}$ est une bissectrice et elle sépare l'angle BAD , angles isométriques.
$m\angle BCA = m\angle DCA$	car $\overline{AD}$ est une bissectrice et elle sépare l'angle BCD en deux angles isométriques.
$m\overline{AC} = m\overline{AC}$	par réflexivité de la relation de congruence.
$\triangle ABC \cong \triangle ADC$	car deux triangles ayant un côté isométrique entre deux angles homologues isométriques sont isométriques.

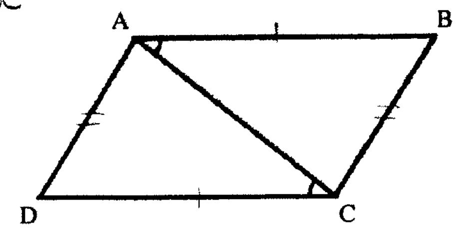
4. Le segment AM est la médiane issue de A du triangle isocèle ABC. Montrer que les triangles ABM et AMC sont isométriques.



AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\overline{AM} \cong \overline{AM}$	par réflexivité de la relation de congruence.
$\overline{BM} \cong \overline{MC}$	car $\overline{AM}$ est une médiane qui coupe le segment BC en son milieu au point M.
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	car un triangle isocèle possède deux côtés isométriques.
$\Delta ABM \cong \Delta AMC$	car deux triangles ayant trois côtés homologues isométriques sont isométriques.

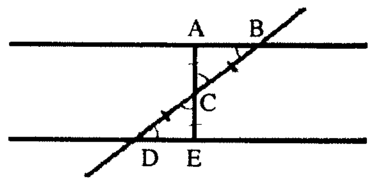
5. **Montrer que la diagonale du parallélogramme ABCD sépare celui-ci en deux triangles isométriques.**

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$



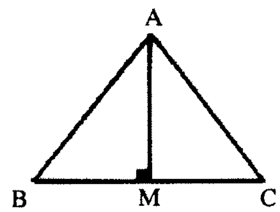
AFFIRMATIONS	**JUSTIFICATIONS**
$\overline{AB} \parallel DC$	car les côtés opposés dun parallélogramme, sont parallèles.
$\angle CAB \cong \angle ACD$	car des angles alternes-internes formés par des parallèles coupées par une sécante sont isométriques.
$\overline{AB} \cong \overline{DC}$	car les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques.
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$	car les côtés opposés dun parallélogramme sont isométriques.
$\triangle ABC \cong \triangle ADC$	car deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues isométriques sont isométriques.

6. On donne deux parallèles coupées par une sécante. On trace une autre sécante passant par le point milieu du segment sécant compris entre les parallèles. On veut montrer que les deux triangles ainsi formés sont congrus.



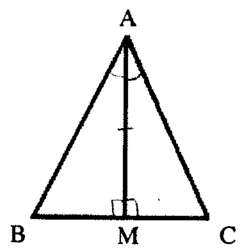
AFFIRMATIONS	**JUSTIFICATIONS**
$m\angle ACB = m\angle ECD$	car des angles opposés par le sommet sont isométriques.
$m\overline{DC} = m\overline{CB}$	par hypothèse
$m\overline{AC} = m\overline{CE}$	car C est le point milieu de $\overline{AE}$.
$\triangle ABC \cong \triangle EDC$	car deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues isométriques sont isométriques.

7. Soit le triangle équilatéral ABC et la hauteur AM issue du sommet A. Montrer que les triangles ABM et ACM sont isométriques en utilisant la propriété CCC.



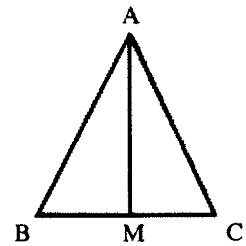
AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	car un triangle équilatéral possède trois côtés isométriques.
$\overline{AM} \cong \overline{AM}$	par réflexivité de la relation de congruence.
$\overline{BM} \cong \overline{MC}$	Dans le triangle équilatéral, $\overline{AM}$ est une hauteur et aussi une médiane qui sépare $\overline{BC}$ en son milieu au point M.
$\Delta ABM \cong \Delta ACM$	car deux triangles ayant trois côtés homologues isométriques sont isométriques.

8. Soit le triangle isocèle ABC et la médiatrice AM issue du sommet A. Montrer que les triangles ABM et AMC sont isométriques en utilisant la propriété ACA.



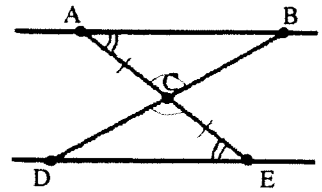
AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$m\overline{AM} = m\overline{AM}$	par réflexivité de la relation de congruence
$m\angle BMA = m\angle CMA = 90°$	car $\overline{AM}$ est une médiatrice qui coupe perpendiculairement $\overline{BC}$ pour former des angles droits.
$m\angle BAM = m\angle CAM$	car dans un triangle isocèle, la médiatri $\overline{AM}$ est aussi une bissectrice qui sépare l'angle BAC en deux angles isométriques
$\triangle ABM \cong \triangle ACM$	car deux triangles ayant un côté isométrique entre deux angles homologues isométriques sont isométriques.

9. Soit le triangle isocèle ABC et la médiatrice AM issue du sommet A. Montrer que les triangles ABM et AMC sont isométriques en utilisant la propriété CAC.



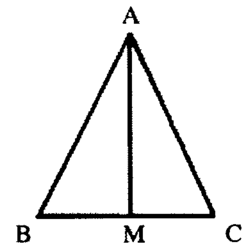
AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\overline{AM} \cong \overline{AM}$	par réflexivité de la relation de congruence.
$m\angle AMB = m\angle AMC = 90°$	car $\overline{AM}$ est une médiatrice qui coupe perpendiculairement $\overline{BC}$ et forme deux angles droits.
$\overline{BM} \cong \overline{MC}$	car $\overline{AM}$ est une médiatrice qui coupe $\overline{BC}$ en son milieu au point M.
$\Delta ABM \cong \Delta ACM$	car deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues isométriques sont isométriques.

10. Les droites AB et DE sont parallèles et le point C est le milieu du segment AE. Prouver que $m\,\overline{AB} = m\,\overline{DE}$.



AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$m\angle ACB = m\angle ECD$	car des angles opposés par le sommet sont isométriques.
$m\overline{AC} = m\overline{CE}$	car C est le point milieu de $\overline{AE}$.
$m\angle BAC = m\angle DEC$	car des angle alternes-internes formés par des parallèles coupées par une sécante sont isométriques.
$\triangle ABC \cong \triangle DEC$	car deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues isométriques sont isométrique
$m\overline{AB} = m\overline{DE}$	car deux triangles isométriques ont tous leurs côtés homologues isométriques.

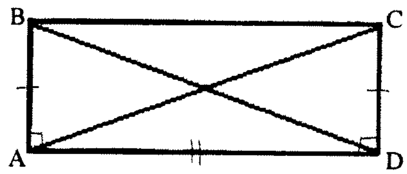
11. Soit le triangle isocèle ABC et la médiane AM.
Montrer que $\angle BAM \cong \angle MAC$.



AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	car un triangle isocèle possède deux côtés isométriques.
$\angle ABC \cong \angle ACM$	Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques.
$\overline{BM} \cong \overline{MC}$	car $\overline{AM}$ est une médiane qui coupe $\overline{BC}$ en son milieu au point M.
$\triangle ABM \cong \triangle ACM$	car deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues isométriques sont isométriques.
$\angle BAM \cong \angle MAC$	car les angles homologues de deux triangles isométriques sont isométriques.

12. Démontrer que : *Dans tout rectangle, les diagonales sont isométriques.*

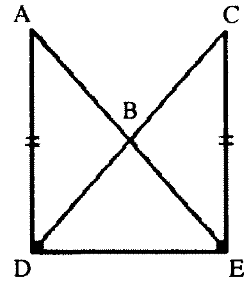
$m\overline{AC} = m\overline{BD}$



AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$m\overline{AB} = m\overline{CD}$	car les côtés opposés d'un rectangle sont isométriques.
$m\angle BAC = mCAD = 90°$	car un rectangle possède quatre angles droits.
$m\overline{AD} = m\overline{AD}$	par réflexivité de la relation de congruence.
$\triangle BAD \cong \triangle CDA$	car deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues isométriques sont isométriques.
$m\overline{AC} = m\overline{BD}$	car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont isométriques.

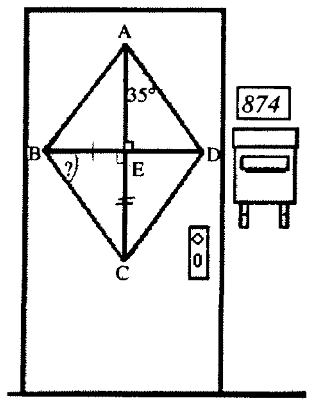
13. Soit la figure ci-contre :

Montrer que le segment AE est isométrique au segment CD.



AFFIRMATIONS	**JUSTIFICATIONS**
$\overline{AD} \cong \overline{CE}$	par hypothèse
$\angle ADE \cong \angle CED$	par hypothèse.
$\overline{DE} \cong \overline{DE}$	par réflexivité de la relation de congruence.
$\triangle ADE \cong \triangle CED$	car deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues isométriques sont isométriques.
$\overline{AE} \cong \overline{CD}$	car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont isométriques.

14. Un vitrier doit poser 4 vitraux dans l'ouverture en forme de losange d'une porte d'entrée. Le vitrier sait qu'un losange a 4 côtés isométriques et que ses diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu. Si l'angle DAE mesure 35°, quel angle le vitrier doit-il donner à l'angle EBC ?



AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$m\angle EDA = 180° - (90° + 35°)$ $m\angle EDA = 55°$	car la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°.
$m\overline{BE} = m\overline{ED}$	car la diagonale $\overline{AC}$ du losange coupe la diagonale $\overline{BD}$ en son milieu au point E.
$m\overline{AE} = m\overline{EC}$	car la diagonale $\overline{BD}$ du losange coupe la diagonale $\overline{AC}$ en son milieu au point E.

… suite autre page

$m\angle AED = m\angle CEB$	car des angles opposés par le sommet sont isométriques.
$\triangle AED \cong \triangle BEC$	car deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues isométriques sont isométrique
$m\angle EBC = m\angle ADE = 55°$	car les angles homologues de deux triangles isométriques sont isométriques.